三次元無秩序系に於ける局在度 II(基研モレキュール型研究会,基研研究会報告)

藤田, 武彦

る。即ち、もし$M_{11}(N-1, -N')$の絶対値の大きさが充分大きいとするとa_N、b_Nが$a_{N'}$、$b_{-N'}$に対しdecayしなければならないからである。（boundary条件を満たすことは不可能になる。）一般に解がdecayするとき、その幅が$1/L(E)$（$L(E)$は局在度）によって表わされることはMinami & Horiによってconjectureされており、Matsuda－Ishiiにより示されているが、この方法論により明らかにされる[7]。(7)と(8)の一致を示すのに使った性質はmatrix Mのunimodularity Cayley性及び“exponential growth”である。従って、こゝの結論は一般の一次元系について主張出来ると思われる。即ちMott & Twoseの一次元系についてのconjectureは成立すると思われる。

文　　献

1) N. F. Mott and W. D. Twose, Adv. in Phys. 10 (1961) 107
2) N. F. Mott,
3) P. W. Anderson, Phys. Rev. 109 (1958) 1492
4) R. E. Borlnd, Proc. Roy. Soc. A274 (1963) 529
5) H. Matsuda and K. Ishii, Prog. Theor. Phys. Suppl 45 (1970) 56
6) S. Minami and J. Hori, Prog. Theor. Phys. Suppl 45 (1970) 87
7) T. Hirota, 物性研究 16 (1971) 487

三次元無秩序系に於ける局在度 II

北大理　藤田武彦

§1 序　論

前論文[1]では三次元Anderson modelに於いて局在度$L(E)$をGreen関数の非対角要素の比の対数（アンサンブル）平均で定義した。他方、Thouless[2]は一次元Anderson modelに対して両端の振幅の積の幾何平均の対数で固有状態のfall－

off distance を表現した。こゝでは(1)任意次元系に於いて固有エネルギーに対するGreen 関数の非対角要素の比は対応する state ratio に一致することを示し(2) Thouless の fall−off distance $\lambda(E)$ を高次元系に拡張し上述の局在度に一致することを示す。

§2 State Ratio と Green関数の比の間の関係

一次元 Anderson model では Green 関数の非対角要素の比 $G_{ij}(E)/G_{1+ij}(E)$ は固有エネルギー E_β に対しては固有振幅の比 u_i^β/u_{i+1}^β で与えられ任意のエネルギーに対しては片側で境界条件を満たす定差方程式の特解の比 $u'_i(E)/u'_{i+1}(E)$ で表わされる。ここでは $N_0=N^d$ 個の site から成る d 次元 Anderson model を考え β 番目の固有状態は site l の回りに局在しているものと仮定する。

Green 関数は

$$G_{jj'}(E)=S_{j'j}(E)/S(E)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N_0}\frac{u_j^\alpha\,\overline{u_{j'}^\alpha}}{E-E_\alpha} \tag{1}$$

但し、$S(E)$、$S_{j'j}(E)$ は各々固有行列式、$(j'j)$ 要素の余因子行列式を表わす。pole $E=E_\beta$ のみを含む contour C_β 上の積分を行なうと

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\beta}G_{jj'}(E)\,dE=u_j^\beta\,\overline{u_{j'}^\beta}$$

$$=S_{j'j}(E_\beta)\Big/\prod_{\alpha(\neq\beta)}(E_\beta-E_\alpha) \tag{2}$$

が得られこれから固有エネルギー E_β に対する state ratio の表現

$$u_i^\beta/u_{i'}^\beta=S_{li}(E_\beta)/S_{li'}(E_\beta)$$

$$=\left[G_{il}(E)/G_{i'l}(E)\right]_{E=E_\beta} \tag{3}$$

を得る。

§3 Fall−off Distanceと Degree of Localization

Thouless の一次元 Anderson model に対する fall−off distance の定義を高次元系に拡張するために localized site lを始点とするある一次元的方向に着目する。 fall−off distance の定義を

$$\lim_{\substack{N'\to\infty \\ (N\to\infty)}} \ln \sqrt[(N')]{\left| u^{\beta}_{N'} \quad u^{\beta}_{l} \right|} \equiv -\lambda_{\beta}$$

で与える。こゝで $u^{\beta}_{N'}$ は site ℓ から着目する方向に N' 歩離れた site の固有振幅を表わす。

(3)を用いると

$$\lambda_{\beta} = -\lim_{N'\to\infty} \frac{1}{N'} \sum_{N'} \ln \left| \left[G_{N'l}(E) \Big/ G_{N'-1\,l}(E) \right]_{E=E_{\beta}} \right|$$

$$\equiv -\left\langle \ln \left| \left[G_{i'l}(E) \Big/ G_{i'-1\,l}(E) \right]_{E=E\beta} \right| \right\rangle \qquad (4)$$

となる。但し固有振幅は規格化されているものとし、

$\lim_{N'\to} \frac{1}{N'} \ln \left| u^{\beta}_{l} \right| = 0$ を用いた。< >は site l から放射状にのびる着目する line 上の sample average を表わす。(3)によるとこゝで表われる Green 関数の ratio は site l に依存しないから一般の site N'に置き換えることができて

$$\lambda_{\beta} = -\left\langle \ln \left| \left[G_{i'N'}(E) \Big/ G_{i'-1N'}(E) \right]_{E=E\beta} \right| \right\rangle \qquad (5)$$

が得られる。 fall−off distance λ_{β} は局在度の定義に類似であるがこゝでは平均が着目する line上の sample average である点が異る。

高次元系の場合任意エネルギーEに対して(3)を満足する量 $\{v_i\}$を“quasi−amplitude”と呼ぶことにする。即ち、

$$v_i \Big/ v_{i'} \equiv G_{i\,i'}(E) \Big/ G_{i'\,i'}(E)$$

$$\equiv C(i, i') \tag{6}$$

と定義する。このとき初期条件 $v_{N'} = 1$ に対する quasi－amplitude の増大の割合は

$$\lambda \equiv \frac{1}{N'} \ln |v_i|$$

$$= \frac{1}{N'} \ln |C(i, N') v_{N'}|$$

$$= -\langle \ln | G_{iN'}(E) / G_{i-1N'}(E) | \rangle \tag{7}$$

で与えられる。量 λ は系の端の site から出発して最大の振幅を与える site 迄の line 上の quasi－amplitude の増大の割合を与える。エネルギーE 固有エネルギー E_β に一致するとき quasi－amplitude は固有振幅に一致し λ は対応する fall－off distamce λ_β に等しくなる。こゝでさらに quasi－amplitude の state ratio v_i / v_{i+1} に関して系は ergodicであると仮定する。即ち、ある sample の着目する line 上の v_i / v_{i+1} の分布は ensemble に渡っての v_i / v_{i+1} の分布に等しいと仮定する。そのとき

$$\lambda = -\overline{\ln \left| G_{iN'}(E) \big/ G_{i-1N'}(E) \right|} \tag{8}$$

が得られる。但し―― は ensemble average を表わす。従って(8)で与えられる fall－off distanceは degree of localization の定義に一致する。

参考文献

1) T.Fujita and J.Hori, J.Phys C.5 (1972) 1059

2) D.J.Thouless ,Preprint